Método Axiomático e Teorias Formais

Episódio 10

Exemplos Complementares

Nesses exemplos, estamos considerando uma linguagem para a aritmética dos números naturais:

- Símbolos auxiliares, variáveis, conectivos e quantificadores.
- Uma constante individual: a_1.
- Três letras funcionais: f_1^1, f_1^2 e f_2^2.
- Uma letra predicativa: A_1^2.

Estamos também considerando a seguinte interpretação J (que podemos considerar como a interpretação padrão da aritmética):

- O domínio de interpretação é $D_J = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$.
- A interpretação de a_1 é $0 \in \mathbb{N}$.
- As interpretações de f_1^1, f_1^2 e f_2^2 são, respectivamente, as operações de sucessor, soma e multiplicação usuais entre naturais.
- A intepretação de A_1^2 é a igualdade usual entre naturais.

Exemplo 2:

Vamos analisar a fórmula $(\forall x_1)A_1^2\big(f_2^2(x_1, x_2), f_2^2(x_2, x_1)\big)$.

Queremos verificar se alguma valoração a satisfaz. De acordo com o seu formato, devemos utilizar a definição (S4):

(S4) v satisfaz $(\forall x_i)B$ sse toda valoração v' que é equivalente a v satisfaz B.

Vamos então partir diretamente para a interpretação da fórmula $A_1^2\big(f_2^2(x_1, x_2), f_2^2(x_2, x_1)\big)$, que é a nossa fórmula B da definição (S4).

Sua interpretação em J é $x_1 * x_2 = x_2 * x_1$.

Se v é uma valoração em J, então a fórmula acima teria a seguinte interpretação:

$v(x_1) * v(x_2) = v(x_2) * v(x_1)$.

Como sabemos que a multiplicação é uma operação comutativa entre naturais, a sentença acima será sempre uma sentença verdadeira sobre números naturais (nosso domínio de interpretação).

Além disso, se tomarmos outra valoração v' que difere de v apenas no valor de x_1, por exemplo, a sentença $v(x_1) * v(x_2) = v(x_2) * v(x_1)$ continuará sendo verdadeira.

Portanto, pela definição (S4), v satisfaz a fórmula $(\forall x_1)A_1^2\big(f_2^2(x_1, x_2), f_2^2(x_2, x_1)\big)$.

Exemplo 3

Vamos analisar a fórmula $(\forall x_1)A_1^2(x_1, a_1)$.

Sua interpretação intuitiva seria "para todo x, $x = 0$". Sabemos que essa sentença é falsa.

Seja então v uma valoração em J. A interpretação de $A_1^2(x_1, a_1)$ é $x_1 = 0$.

Nossa valoração v só satisfará essa fórmula se $v(x_1) = 0$.

Suponha que isso ocorra. Mas, nesse caso, se tomarmos outra valoração v' que difere de v no valor x_1, segue então que v' não satisfará a fórmula $x_1 = 0$. Por exemplo, teríamos algo do tipo $1 = 0$.

Portanto, pela definição (S4), não é possível existir uma valoração v que satisfaça $(\forall x_1)A_1^2(x_1, a_1)$.

Esses exemplos foram tirados do livro do Hamilton – Logic for mathematicians.

****

NÚMERO IMAGINÁRIO

numeroimaginario.com.br

Contato – vinicius@numeroimaginario.com.br

Padrim – padrim.com.br/numeroimaginario

Podcast – numeroimaginario.com.br/categoria/podcast

Moodle – numeroimaginario.com.br/moodle

Youtube – youtube.numeroimaginario.com.br

Redes Sociais

facebook.com/podcastnumeroimaginario

twitter.com/num_imaginario

****